## 30　定積分と不等式

基本問題 ＆ 解法のポイント

**52**

**(1)**

$f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ とすると，$f(x)$ は $0\leq a\leq x\leq a+1$ において単調減少するから，

$$\frac{1}{2a+3}\leq\frac{1}{2x+1}\leq\frac{1}{2a+1}$$

よって，$\displaystyle\int_a^{a+1}\frac{1}{2a+3}dx<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\int_a^{a+1}\frac{1}{2a+1}dx$

すなわち，$\displaystyle\frac{1}{2a+3}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\frac{1}{2a+1}$

**(2)**

$\displaystyle\frac{1}{2a+3}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\frac{1}{2a+1}$ より，$\displaystyle\frac{1}{2a+3}<\frac{1}{2}\left[\log(2x+1)\right]_a^{a+1}<\frac{1}{2a+1}$

すなわち，$\displaystyle\frac{1}{2a+3}<\frac{1}{2}\log\frac{2a+3}{2a+1}<\frac{1}{2a+1}$

$a$ を $k$ に置き換えると，$\displaystyle\frac{1}{2k+3}<\frac{1}{2}\log\frac{2k+3}{2k+1}<\frac{1}{2k+1}$

ここで，

$\displaystyle\frac{1}{2k+3}<\frac{1}{2}\log\frac{2k+3}{2k+1}$ より，$\displaystyle 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+3}<1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{2k+3}{2k+1}$

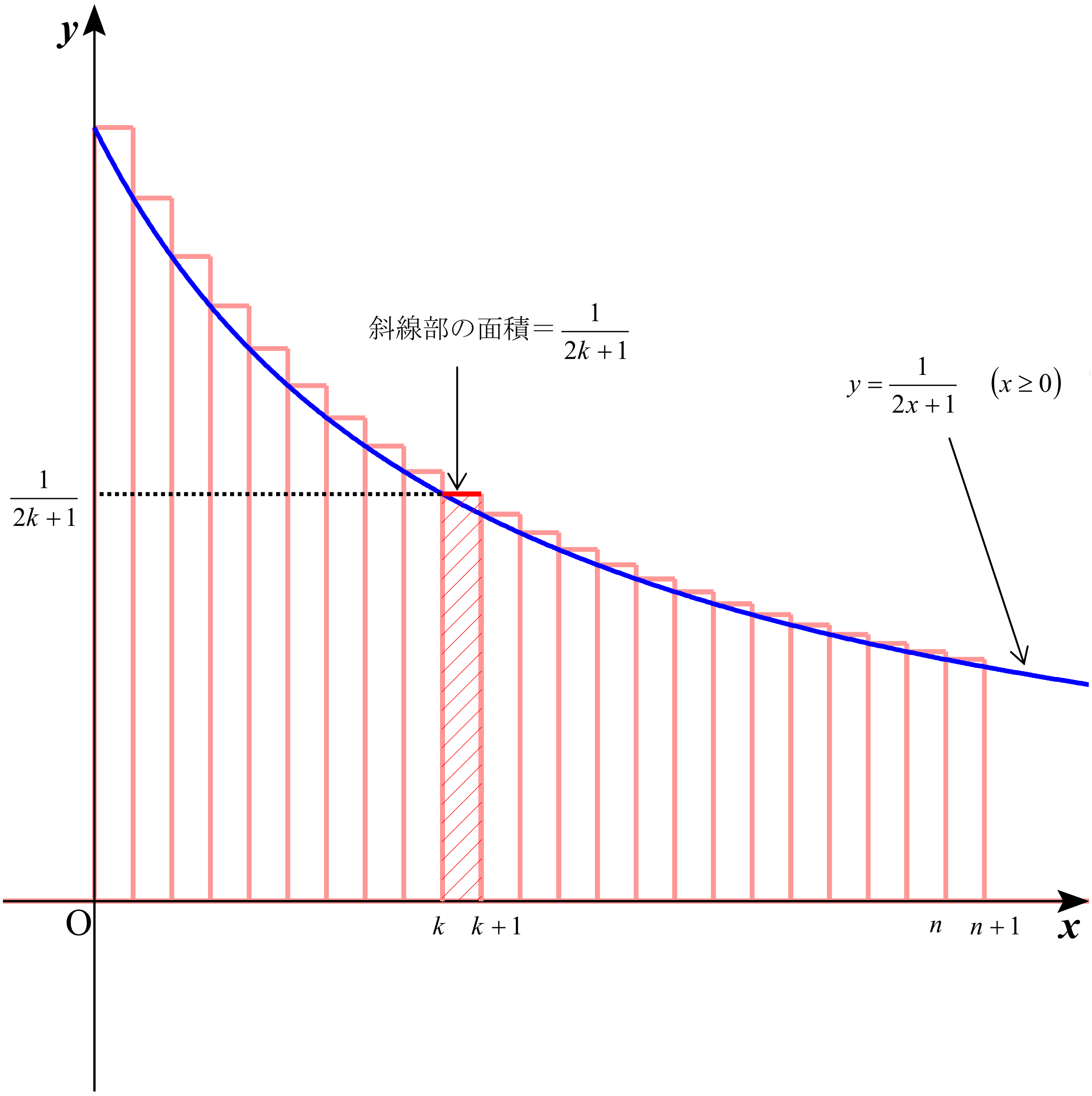
すなわち，$\displaystyle 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\right)=1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$　・・・①

$\displaystyle\frac{1}{2}\log\frac{2k+3}{2k+1}<\frac{1}{2k+1}$ より，$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\log\frac{2k+3}{2k+1}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$

すなわち，$\displaystyle\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+3}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$　・・・②

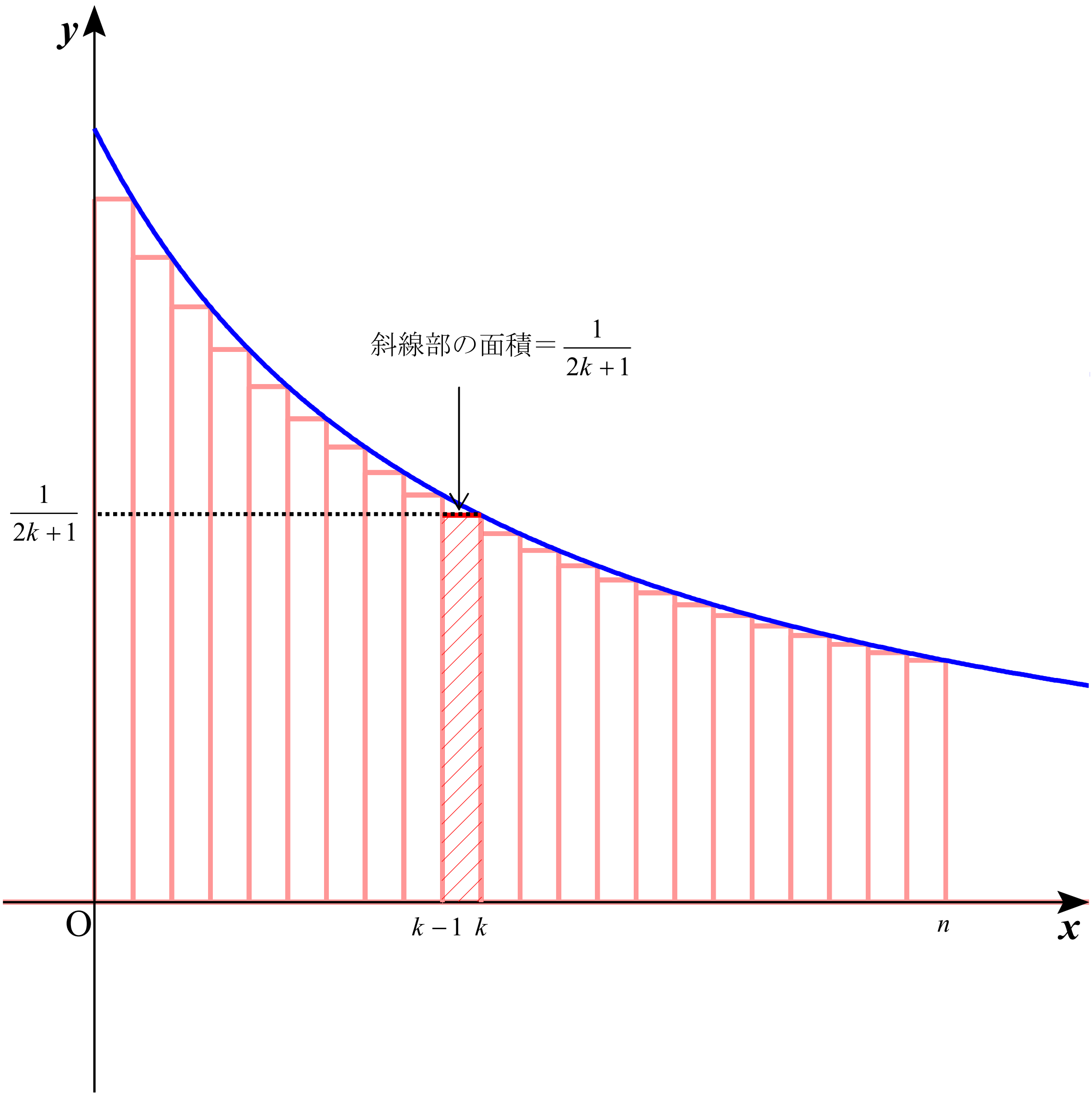
ゆえに，①，②より，$\displaystyle\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$

別解




上図より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}>\int_0^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$　すなわち　$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}>\dfrac{1}{2}\Big[\log(2x+1)\Big]_0^{n+1}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\log(2n+3)<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$　・・・①




同様に，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}<\int_0^n\frac{1}{2x+1}dx$　すなわち　$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2}\left[\log(2x+1)\right]_0^n$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\log(2n+1)$

両辺に 1 を加えることにより，$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$　・・・②

①，②をまとめることにより，$\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$

**問題 A**

**176**

**(1)**

（ア）

$f(x)=e^x-(x+1)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1$

これと $e^x-1=0$ の解が $x=0$ であることから，$f(x)$ の増減は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\downarrow$ | $0$ | $\uparrow$ |

よって，$f(x)\geq 0$ すなわち $1+x\leq e^x$ （等号成立は $x=0$ のとき）

（イ）

（ア）より，すべての実数 $t$ に対して $1+t\leq e^t$ （等号成立は $t=0$ のとき）が成り立つ。

したがって，$t=-x^2$ とおくと，$1-x^2\leq e^{-x^2}$ （等号成立は $x=0$ のとき）　・・・①

$t=x^2$ とおくと，$1+x^2\leq e^{x^2}$ すなわち $e^{-x^2}\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ （等号成立は $x=0$ のとき）　・・・②

よって，①，②より，$1-x^2\leq e^{-x^2}\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ （等号成立は $x=0$ のとき）

**(2)**

$1-x^2\leq e^{-x^2}\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ （等号成立は $x=0$ のとき）より，$\displaystyle\int_0^1(1-x^2)dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int_0^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\quad ・・・③$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ については，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$x=1$ ならば $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$x=0$ ならば $\theta=0$ より，

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}\quad ・・・④$$

よって，③，④より，$\dfrac{2}{3}<\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx<\dfrac{\pi}{4}$

**177**

**(1)**

$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$

$0\leq\cos x\leq 1,\ 0<\dfrac{2}{\pi}<1$ だから，$f'(\alpha)=\cos\alpha-\dfrac{2}{\pi}=0\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$f(x)$ の増減は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | / | $+$ | $0$ | $-$ | / |
| $f(x)$ | $0$ | ↑ | 極大 | ↓ | $0$ |

よって，$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)\geq 0$ すなわち $\sin x\geq\dfrac{2}{\pi}x$

**(2)**

$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x\geq\dfrac{2}{\pi}x$ より，$-n\sin x\leq-\dfrac{2n}{\pi}x\ (n>0)$

よって，$0<e^{-n\sin x}\leq e^{-\frac{2n}{\pi}x}$

したがって，これより $0<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\sin x}dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2n}{\pi}x}dx$

これと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2n}{\pi}x}dx=\left[-\frac{\pi}{2n}e^{-\frac{2n}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\left(1-e^{-n}\right)$$

より，

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\sin x}dx\leq\frac{\pi}{2n}\left(1-e^{-n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1-e^{-n}\right)=0$ だから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\sin x}dx=0$

**178**

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \leq x \leq n+1)$ より，$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}dx$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{39999}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}dx < \sum_{n=1}^{39999}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \sum_{n=1}^{39999}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}dx$

これと

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{39999}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}dx &= \sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1}} + \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{39999}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}dx &= \sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{40000}} + \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= -\frac{1}{200} + \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

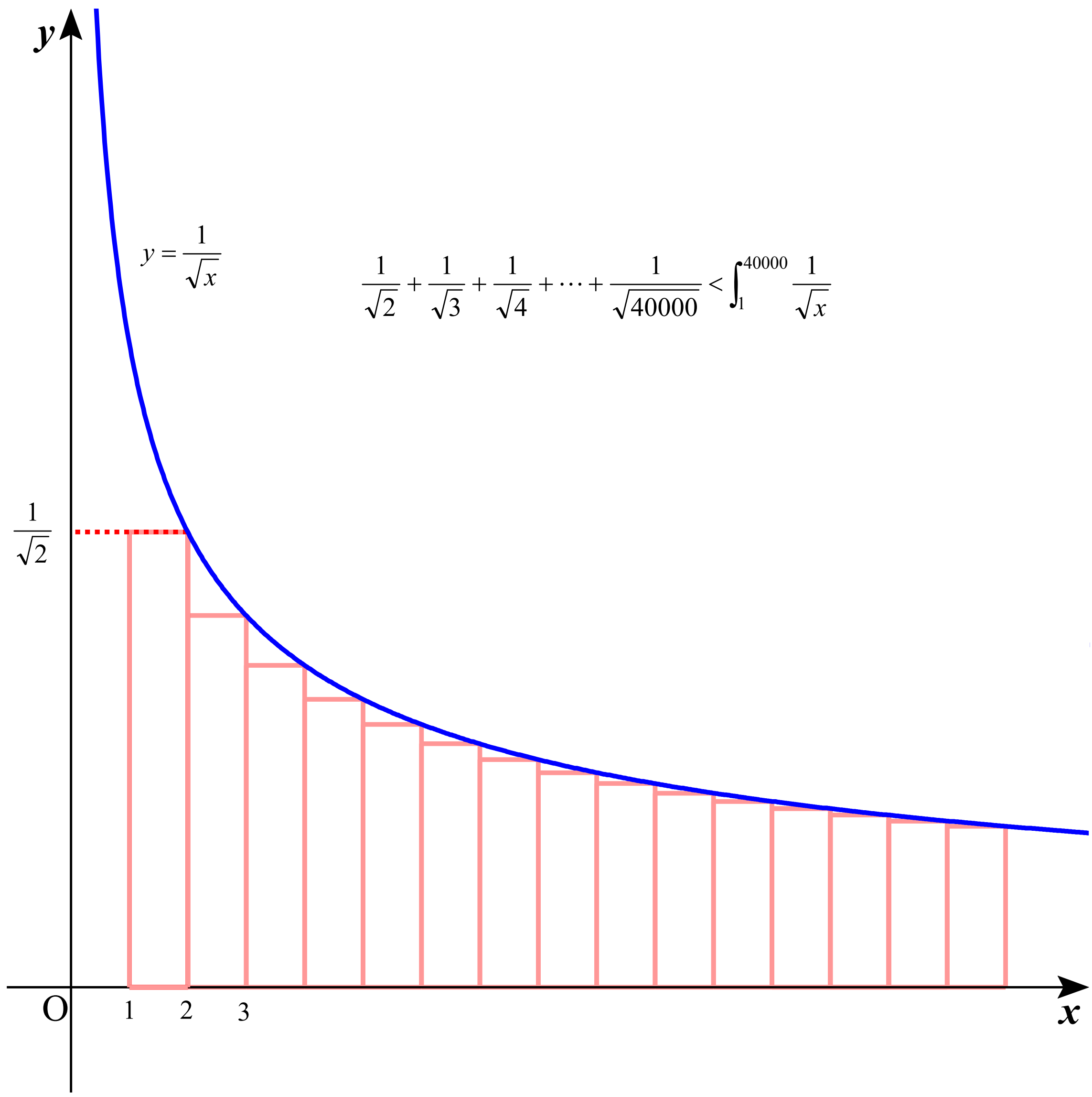
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{39999}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \left[2\sqrt{x}\right]_1^{40000} \\ &= 398\end{aligned}$$

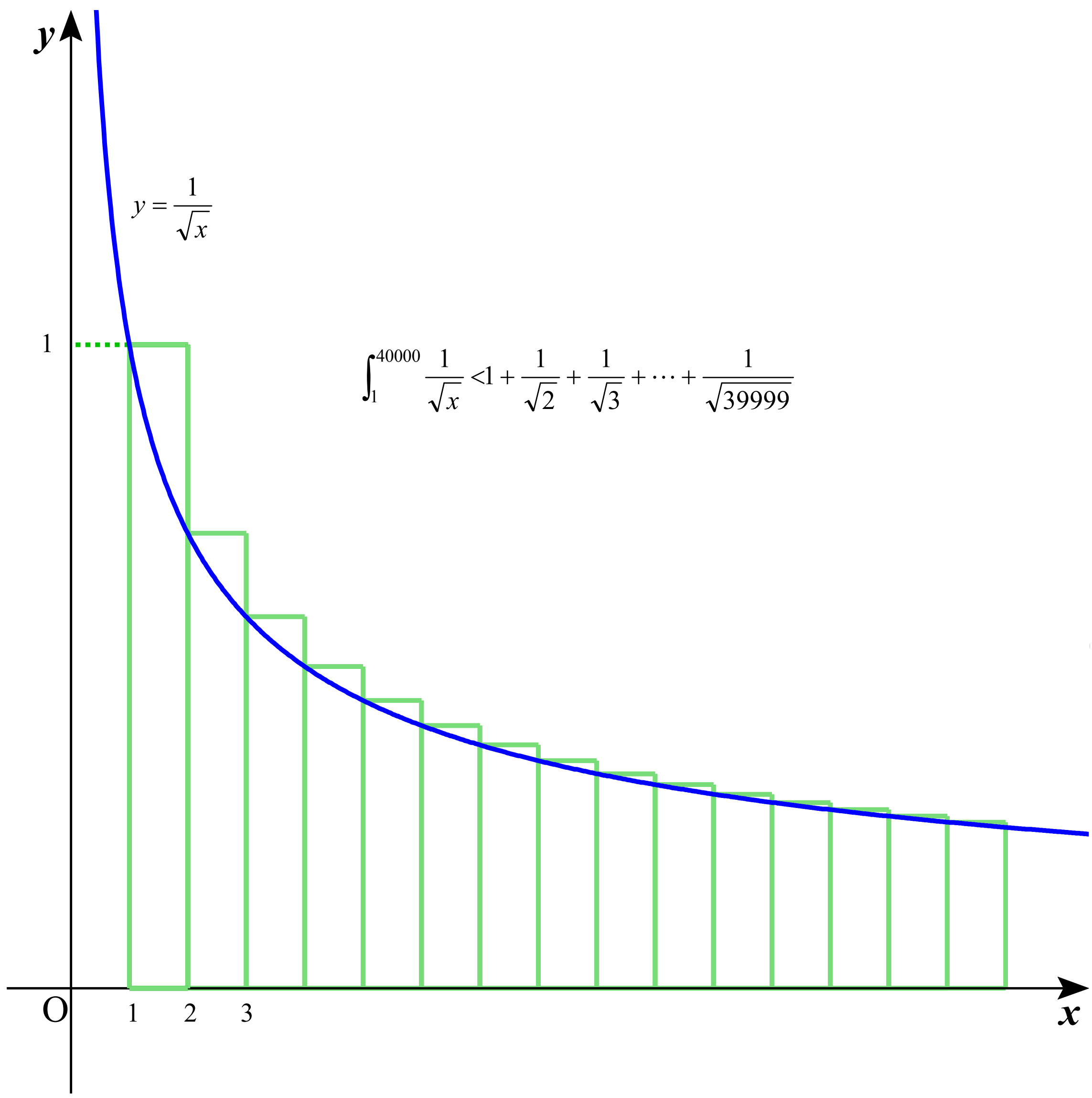
より，

$\displaystyle -1 + \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}} < 398 < -\frac{1}{200} + \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$　すなわち　$\displaystyle 398 + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}} < 398 + 1$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398

補足：グラフと図形イメージ




y
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$
1
$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}$
O
1
2
3
x

**179**

**(1)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x dx$$

$$= \left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\left(\sin^{n-1} x\right)' dx$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

よって，$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \quad \therefore na_n = (n-1)a_{n-2}$

**(2)**

$na_n = (n-1)a_{n-2}$ より，$a_{n-1} \cdot na_n = a_{n-1} \cdot (n-1)a_{n-2}$　すなわち　$na_{n-1}a_n = (n-1)a_{n-2}a_{n-1}$

よって，$na_{n-1}a_n = (n-1)a_{n-2}a_{n-1} = (n-2)a_{n-3}a_{n-2} = \cdots = 2a_1a_2 = 1 \cdot a_0a_1$

また，$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$，$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ より，$a_0a_1 = \frac{\pi}{2} \quad \therefore na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$

**(3)**

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $0 \leq \sin x \leq 1$ だから，$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$

よって，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx$　すなわち　$a_n \geq a_{n+1}$

**(4)**

$a_n > 0$ および(3)より，$na_na_{n+1} \leq na_n{}^2 \leq na_{n-1}a_n$

(2)より，$na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$

また，$\lim_{n\to\infty} na_na_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+1} \cdot (n+1)a_na_{n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+1} \cdot \lim_{n\to\infty}(n+1)a_na_{n+1} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

よって，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty} na_n{}^2 = \frac{\pi}{2}$

**問題 B**

**180**

**(1)**

$k$ を自然数とすると，$k \le x \le k+1$ において $\log x$ は単調に増加するから，

$\log k \le \log x \le \log(k+1)$ より，$\int_k^{k+1} \log k dx \le \int_k^{k+1} \log x dx \le \int_k^{k+1} \log(k+1) dx$

すなわち $\log k \le \int_k^{k+1} \log x dx \le \log(k+1)$

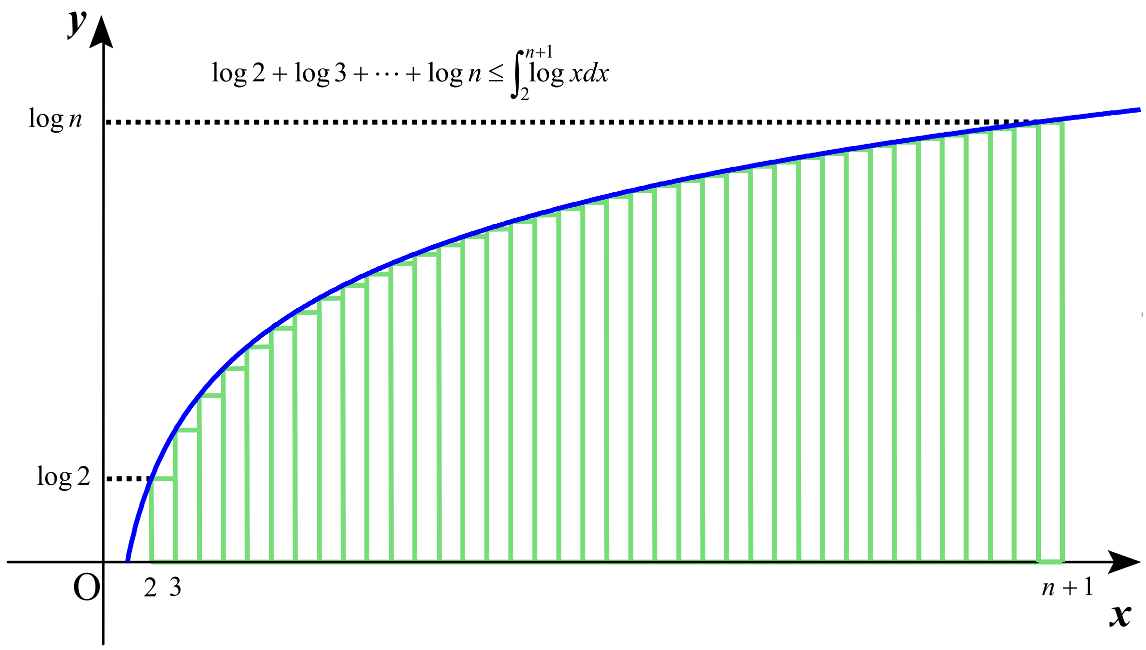
よって，$n$ を 2 以上の自然数とするとき，

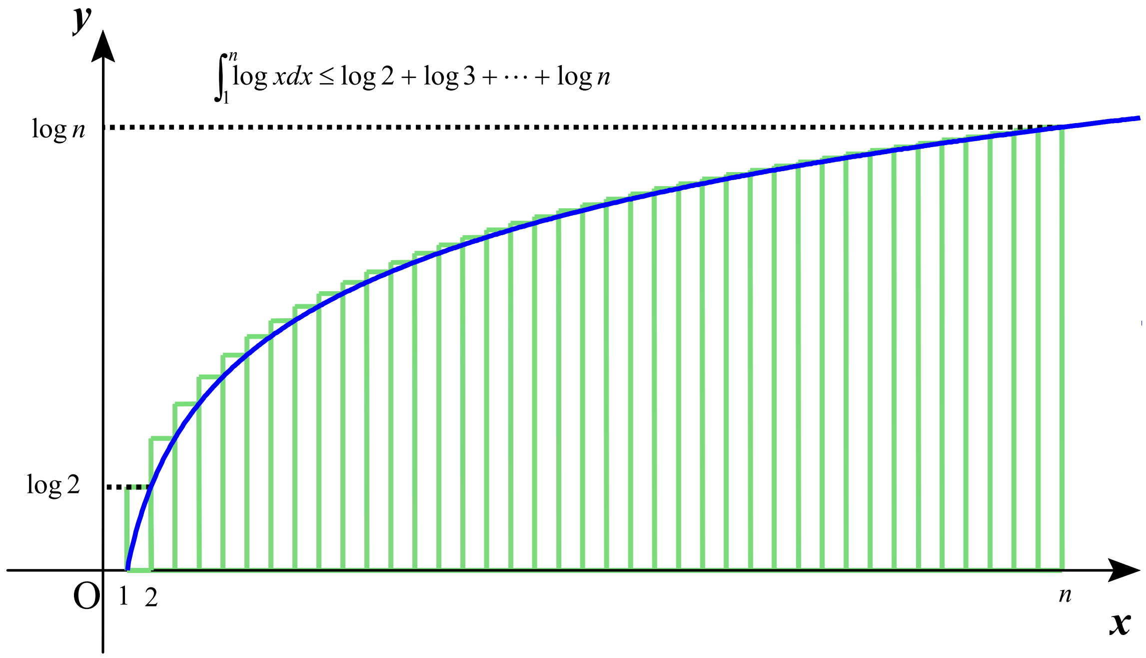
$\sum_{k=2}^{n} \log k \le \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \log x dx$ かつ $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \log x dx \le \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1)$

すなわち $\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n \le \int_2^{n+1} \log x dx$ かつ $\int_1^{n} \log x dx \le \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$

よって，$\int_1^{n} \log x dx \le \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n \le \int_2^{n+1} \log x dx$

補足：グラフと図形イメージ






**(2)**

$\int_1^n \log x dx \leq \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n \leq \int_2^{n+1} \log x dx$ において，

$$\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \log(2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n) = \log n!$$

$$\begin{aligned}\int_1^n \log x dx &= [x \log x - x]_1^n \\ &= [\log x^x - \log e^x]_1^n \\ &= [\log(x^x e^{-x})]_1^n \\ &= \log(n^n e^{-n}) - \log e^{-1} \\ &= \log(n^n e^{-n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^{n+1} \log x dx &= [\log(x^x e^{-x})]_2^{n+1} \\ &= \log(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} - \log(2^2 e^{-2}) \\ &= \log\left\{\frac{1}{4}(n+1)^{n+1} e^{-n+1}\right\}\end{aligned}$$

よって，$\log(n^n e^{-n+1}) \leq \log n! \leq \log\left\{\frac{1}{4}(n+1)^{n+1} e^{-n+1}\right\}$

ゆえに，$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq \frac{1}{4}(n+1)^{n+1} e^{-n+1}$

**181**

**(1)**

**解法 1**

$0 \leq x \leq 1$において，$k \leq k+x \leq k+1$，$1-x \geq 0$ より，$\dfrac{1-x}{k+1} \leq \dfrac{1-x}{k+x} \leq \dfrac{1-x}{k}$

また，$0 < x < 1$において，$k < k+x < k+1$，$1-x > 0$ より，$\dfrac{1-x}{k+1} < \dfrac{1-x}{k+x} < \dfrac{1-x}{k}$

よって，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+1}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k}dx$

これと$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+1}dx = \left[-\frac{(1-x)^2}{2(k+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2(k+1)}$および$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k}dx = \left[-\frac{(1-x)^2}{2k}\right]_0^1 = \frac{1}{2k}$より，

$\displaystyle\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$

**解法 2**

$y = f(x) = \dfrac{1-x}{k+x}$ $(-k < x)$すなわち$y = f(x) = -1 + \dfrac{k+1}{x+k}$ $(-k < x)$について，

点 A を$(1,\ f(1))$とすると，$\mathrm{A}(1,\ 0)$

点 B を$(0,\ f(0))$とすると，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$

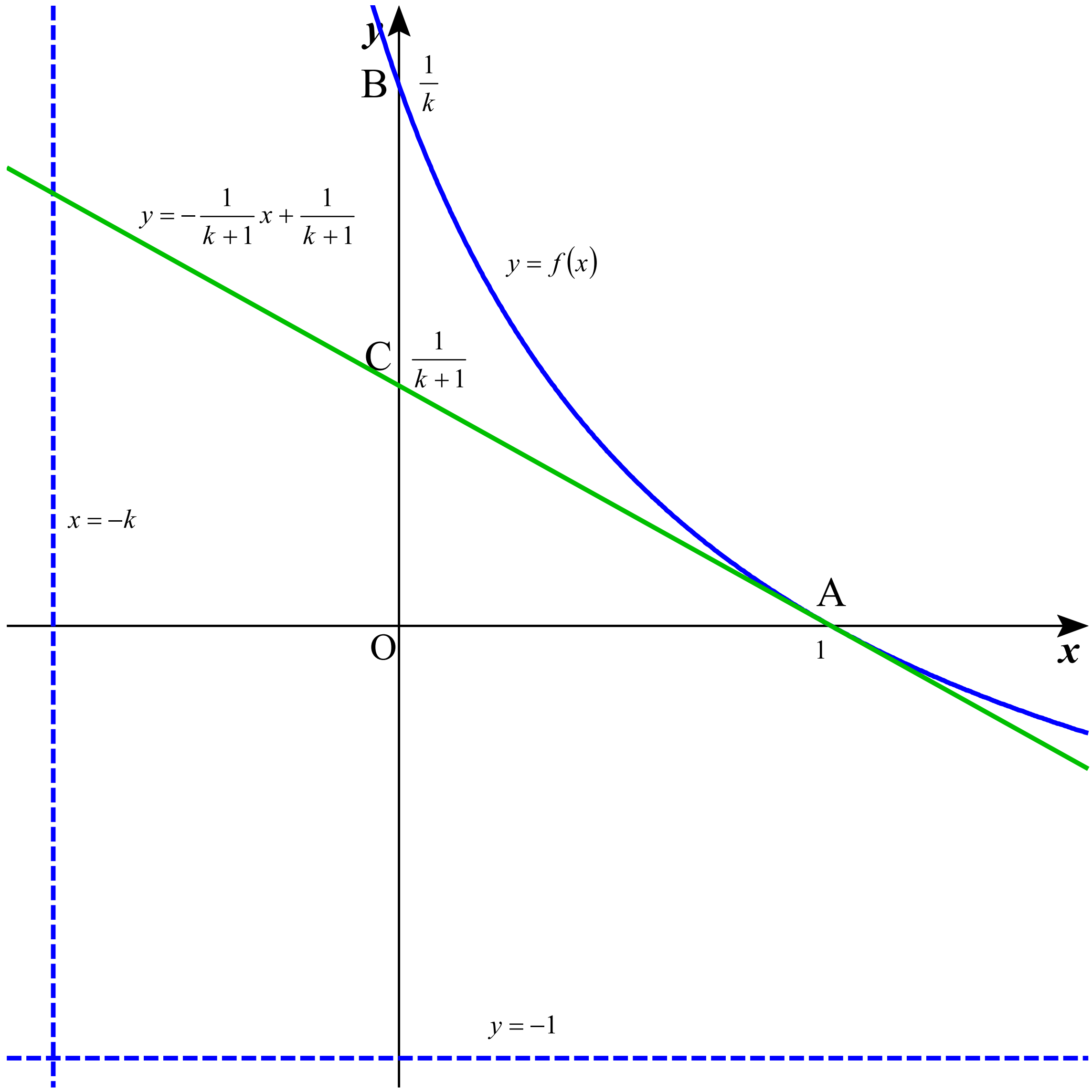
点 A における接線の方程式は$y = f'(1)(x-1) = f'(1)x - f'(1)$と表され，

これと$f'(x) = -\dfrac{k+1}{(x+k)^2}$より，その方程式は$y = -\dfrac{1}{k+1}x + \dfrac{1}{k+1}$

よって，その$y$切片を C とすると，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$

$f''(x) = \dfrac{2(k+1)}{(x+k)^3} > 0$より，$f(x)$は下に凸であるから，$\displaystyle\triangle\mathrm{OAC} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \triangle\mathrm{OAB}$

すなわち$\displaystyle\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$


y
B
$\frac{1}{k}$
$y=-\frac{1}{k+1}x+\frac{1}{k+1}$
$y=f(x)$
C
$\frac{1}{k+1}$
$x=-k$
A
O
1
x
$y=-1$

**(2)**

$\dfrac{1}{2(k+1)} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$ において，

$$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx = \int_0^1 \left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx$$
$$= \left[-x+(k+1)\log(k+x)\right]_0^1$$
$$= -1+(k+1)\log\frac{k+1}{k}$$

より，$\dfrac{1}{2(k+1)} < -1+(k+1)\log\dfrac{k+1}{k} < \dfrac{1}{2k}$　$\therefore \dfrac{1}{2(k+1)^2} < -\dfrac{1}{k+1}+\log\dfrac{k+1}{k} < \dfrac{1}{2k(k+1)}$

これと $\dfrac{1}{2(k+1)^2} > \dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}$ より，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)} < -\dfrac{1}{k+1}+\log\dfrac{k+1}{k} < \dfrac{1}{2k(k+1)}$

よって，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right) < \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$

すなわち $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^{m}\left(-\frac{1}{k}+\log\frac{k}{k-1}\right) < \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2k(k-1)}$

また，

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$$
$$= \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n+1}^{m}\left(-\frac{1}{k}+\log\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=n+1}^{m}\log\frac{k}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$
$$= \left(\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\log\frac{m-1}{m-2}+\log\frac{m}{m-1}\right)-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$
$$= \log\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(m-1)m}{n(n+1)\cdot\cdots\cdot(m-2)(m-1)} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$
$$= \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m-1}\right)+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$
$$=\frac{m-n}{2mn}$$

よって，$\dfrac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\dfrac{m}{n}-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\dfrac{m-n}{2mn}$